위상수학 핵심개념 해설

변정윤

위상수학 핵심개념 해설

이 글에서는 “Principles of Mathematical Analysis”, Rudin, 2nd Ed., McGraw-Hill, 1976, (Rudin, 1976) 제 2장의 위상수학 개념의 보충설명을 제공한다. (Rudin, 1976) 제 2장의 개념들은 매우 중요하고 기본적인 것들로서, 고생스럽더라도 초학자들이 반드시 익혀두어야 수학언어의 기본을 습득할 수 있다. 그러나 [Rudin] 2장 본문은 직관적인 부분에 대한 설명 및 개념이 응용되는 상황에 대한 설명이 지나치게 결여된 감이 있고 위상(topology) 및 열린 집합(open set)의 추상적인 정의 및 연결성(connectedness)에 대한 설명이 좀 부족한 듯하다. 이와 같은 측면들에 대한 보충설명이 이 글의 목적이다. 이 글에 주어지는 추상적인 개념들은, 예를 들어 나중에 실변수함수론이나 함수해석학에 나오는 위상수학 개념들을 이해하는 데 매우 기본적인 역할을 하므로 반드시 알아둘 필요가 있다.

1 극한, 근방, 열린 집합, 그리고 위상

우선 위상과 열린 집합의 정의는 다음과 같다:

정의 1. X가 집합일 때, X의 부분집합의 집합 $\mathscr{T}$가 다음을 만족하면 $\mathscr{T}$를 X의 위상(topology)이라 한다.

(1) $X \in T, \emptyset \in \mathscr{T}$

(2) 임의의 T의 부분집합 S에 대하여 $\bigcup_{U \in S} U \in \mathscr{T}$이다.

(3) 임의의 $\{U, V\} \in \mathscr{T}$에 대하여 $U \cap V \in \mathscr{T}$이다.

또, $U \in \mathscr{T}$이면 U를 열린 집합(open set)이라 한다. 위상 $\mathscr{T}$가 정의된 집합 X를 공간(space)이라고도 부른다.

(Rudin, 1976)에서는 먼저 X에서의 거리함수(metric) $d(x, y) = |x - y|$와 x의 근방(neighborhood) $N_r(p) = \{q | d(x, y) < r\}$을 정의한 후 근방을 이용하여 내부점(interior point)을 정의하고, 모든 점이 내부점인 집합을 열린 집합으로 정의한다. 그러면 열린 집합 O의 임의의 원소 O에 대하여 x에 포함되는 x의 근방 $N(x)$가 존재하고 $O = \bigcup_{x \in O} N(x)$가 된다. 이러한 집합 O의 집합 $\mathscr{T}$는 위의 조건 (1) (3)을 만족함을 쉽게 보일 수 있다.

위상과 열린 집합의 개념을 고려하는 가장 근본적인 이유는 극한 개념을 추상화하여 다루기 위한 것이다. (Rudin, 1976)을 충분히 잘 공부했다면 (Rudin, 1976)에서의 열린 집합의 정의가

극한을 아주 잘 추상화해 준다는 것을 잘 알 수 있을 것이다. 그런데 이 글에 주어진 위상의 정의는 이 열린 집합의 개념을 또 한번 추상화한 것이다. 왜 그러는 걸까? 이유는 극한을 다루는 집합이 유클리드 공간 보다 더 복잡하거나 추상적인 경우 극한 개념을 보다 편리하게 일반화하여 사용하기를 원하기 때문이다. (이러한 복잡하거나 추상적인 공간의 예가 대표적인 예가 펑셔널 해석학(functional analysis))에서 사용하는 함수공간(function space) 또는 다양체(manifold 또는 variety)이다.) 우선 극한 개념과 열린 집합 개념의 관계를 들여다보자.

잘 알려져 있다시피, 극한 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$의 정의는 다음과 같다:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Longrightarrow |x_n - x| < \epsilon$$

이 표현을 잘 음미해 보면 그림과 같이 나타낼 수 있다.

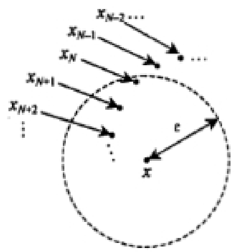

그림 1

그림의 'x로부터의 거리가 ϵ 미만인 점들의 집합'을 $B_\epsilon(x) = \{y|\ |x-y| < \epsilon\}$라 하면, 위의 표현은

$$\forall \epsilon > 0, \exists \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Longrightarrow x_n \in B_\epsilon(x) \qquad (*)$$

가 된다. 그러면 결국 이러한 $B_\epsilon(x)$들의 집합을 완전히 파악해 두고 수열 $\{x_n\}$들이 위의 정의 (*)를 만족하는지를 알면 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$인지를 알 수 있다는 얘기가 된다.

$|x_n - x| < \epsilon$이나 $B_\epsilon(x)$이나 어차피 똑같은 얘기 아니냐? 뭐하러 쓸데없이 $B_\epsilon(x)$ 같은 것을 생각하느냐? 당연히 그런 생각이 들겠지만, 함수의 극한을 다루다 보면 예를 들어

"정의 (*)에서 집합 $B_\epsilon(x)$ 대신 $B_\epsilon(x)$와 모양이 다른

$$C_\epsilon(x) = \{(x_1,\cdots,x_n)||x_i - y_i| < \epsilon, i = 1,\cdots,n\} \quad (x = (x_1,\cdots,x_n))$$

같은 것을 사용해 보자"

와 같은 시도를 해볼 필요가 있는 경우가 있다. 함수가 이중적분(double integral)같은, 그래프로 나타내기 힘든 형태일 경우 이런 경우가 자주 발생한다. 위의 정의 (*)와 $B_\epsilon(x)$ 대신 $C_\epsilon(x)$를

사용하는 정의

$$\forall \epsilon > 0, \exists \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow x_n \in C_\epsilon(x) \qquad (*')$$

는 동치임을 쉽게 증명할 수 있다. 증명은 독자의 연습문제로 남긴다.

그러면 여기서 $x \in \mathbb{R}^k$의 근방(neighborhood)의 개념을 정식으로 정의해 보자.

"$x \in A \subset \mathbb{R}^k$이고 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$를 만족하는 임의의 수열 $\{x_n\}$에 대하여

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in A$$

를 만족하는 N이 존재할 때, A를 x의 근방이라 한다."

근방 A를 이런 식으로 정의하면 A는 매우 중요한 다음과 같은 성질을 가지게 된다:

"A가 X의 근방이면, $B_\epsilon(x) \subset A$인 $\epsilon > 0$이 존재한다." (**)

증명) 만약 그렇지 않다면, 임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $B_{1/n} \not\subset A$이고, 따라서 $x_n \in B_{1/n}(x) - A$인 x_n이 존재한다. 그러면 수열 $\{x_n\}$은 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$를 만족하지만 임의의 n에 대하여 $x_n \in A$이고, 따라서 A는 x의 근방이 아니므로 모순. □

또 이것의 역도 성립한다.(증명은 독자의 연습문제로 남긴다.) 그러면 다음을 알 수 있다:

1) A가 x의 근방이다. $\Longleftrightarrow x \in U \subset A$ 인 '$B_\epsilon(\xi)$들의 합집합' 꼴인 집합 U가 존재한다.

여기서 '$B_\epsilon(\xi)$들의 합집합' 꼴로 나타내어지는 모든 집합들의 집합을 $\mathscr{T}$라 하자. 그러면 위의 정리 (**)와 $\mathscr{T}$의 정의에 의하여 다음을 즉시 알 수 있다:

2) $x = \lim_{n\to\infty} x_n$
$\Rightarrow x$의 임의의 근방 A에 대하여 $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $(n \geq N \Rightarrow x_n \in A)$
$\Rightarrow x \in U \in \mathscr{T}$ 인 임의의 U에 대하여 $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $(n \geq N \Rightarrow x_n \in U)$

이렇게 되면, $\mathscr{T}$의 원소만 모두 파악하면 $\mathbb{R}^k$에서의 모든 극한을 파악할 수 있다는 얘기가 된다. 단순히 극한을 파악하는 것이 목적이라면 그냥 집합 $B_\epsilon(x)$들만 살펴보면 될 일이지, 구태여 왜 '모든 $B_\epsilon(x)$들의 합집합' 꼴의 집합의 집합 $\mathscr{T}$ 같은 복잡한 것을 생각하느냐 하는 생각이 들 테지만, 일단 이 집합 $\mathscr{T}$(이것이 바로 $\mathbb{R}^k$의 유클리드 위상(Euclidean topology)이다)라는 개념에 도달하면 상당히 편리한 점이 많다. 예를 들어 앞에 말한 집합 $C_\epsilon(x)$의 합집합들의 집합 $\mathscr{T}'$은 $\mathscr{T}$와 같은 집합임을 쉽게 보일 수 있는데, 이것은 $B_\epsilon(x)$들을 이용하여 정의하는

극한은 $C_\epsilon(x)$ 들을 이용하여 정의하는 극한과 같음을 의미한다. (이와 같이 정의된 위상 $\mathscr{T}'$ 을 $\mathbb{R}^k$ 의 상자 위상(box topology)이라 한다. 자세한 설명은 뒤에 위상의 기저(base) 개념을 설명할 때 하도록 한다.)

여기서 주목할 것은 집합 $B_\epsilon(x) = \{y \mid |x-y| < \epsilon\}$는 에서의 상식적인 거리함수 (metric) $d(x-y) = |x-y|$를 이용하여 정의했고 $C_\epsilon(x)$는 이 거리함수를 사용하지 않았다는 것이다. (사실은 $C_\epsilon(x)$ 를 정의할 때도 $d'(x,y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$를 이용하여 $C_\epsilon(x)$와 같이 정의할 수 있는데, 이 때 $d'(x,y)$는 거리함수이다.) 즉 $\epsilon - \delta$ 논법 등에서 이용하는 상식적인 개념들을 사용하지 않고도 극한을 다룰 수 있다는 것이 위상 개념의 핵심이다. 곧 설명하겠지만 극한을 다루는 것은 집합의 포함 개념만 사용하면 가능하다. (여기서 잠깐 주목할 것은 극한을 다루기 위하여 x의 근방을 정의할 때 근방이라는 것이 반드시 열린 집합이어야 할 필요는 없다는 것이다. 1)과 같이 x의 근방은 $x \in U \subset A$을 만족하는 열린 집합 U를 포함하기만 하면 된다. 예를 들어 (Folland, 1984)같은 책에서는 근방이라는 것을 실제로 이렇게 정의한다. 그러나 어떤 정의를 사용하건 간에 정의의 근본 개념을 확실히 숙지해야 함은 물론이다.)

정리하자면, 극한 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$의 정의를 (*)와 같이 나타낼 때 (*)에서 $B_\epsilon(x)$와 같은 역할을 하는 집합을 열린 집합(이 '열린 집합'이라는 용어는 열린 구간 (a,b)를 일반화한 데서 나온 것이다. 마찬가지로 '닫힌 집합(closed set)'이라는 용어도 닫힌 구간 $[a,b]$에서 나온 것이다)이라 하고, 열린 집합의 집합을 위상이라 한다. 위상이라는 개념을 다루는 이유는 극한 개념을 $\epsilon - \delta$ 논법에서 필요한 개념(거리함수 같은 것)이 없이도 다룰 수 있게 하기 위해서이다. 위에서는 일단 위상이라는 개념의 필요성과 발상의 근원을 설명했다. 이제부터 위의 정의 1에 주어진 위상의 정의를 구성할 것이다. 하지만 그 전에 연속함수(continuous function)에 대한 이야기를 잠깐 해두도록 하자. 이것은 그 자체로서도 중요한 이야기지만, 위상의 개념을 일반화하는 데 매우 중요한 포인트가 된다.

2 연속함수

함수 f가 $x = x_0$에서 연속임의 $\epsilon - \delta$ 정의는 다음과 같다:

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 어떤 $\delta > 0$가 존재하여

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

가 성립한다.

그러면 이 정의로부터 $x = x_0$에서 연속인 함수 $f(x)$는 다음 성질을 가짐을 알 수 있다:

'$f(x)$의 임의의 근방 U에 대하여 $f(V) \subset U$인 x의 근방 V가 존재한다.' (****1)

(그림 2 참조. $B_\epsilon(f(x)) \subset U$ 인 $\epsilon > 0$을 잡고 $\epsilon - \delta$ 논법에 의하여 δ를 찾아 $V = B_\delta(x)$ 라 두면 간단하다.)

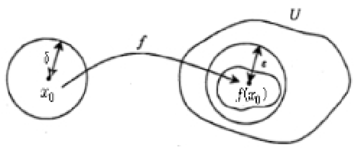

그림 2

이 때 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 가 그 정의역(domain) 전체에서 연속이라면, 즉 임의의 $x \in \mathbb{R}^m$ 에 대하여 f가 x에서 연속이라면 어떻게 될까? 그러면 임의의 열린 집합 U에 대하여, $y \in U$ 이고 $x \in f^{-1}(y)$ 이면 $V_x \subset f^{-1}(U)$ 인 x의 근방 V_x가 존재하게 되고($\because$ ****1), 그러면 $f^{-1}(U) = \bigcup_{y \in U,\ x \in f^{-1}(y)} V_x$ 가 되므로, $f^{-1}(U)$는 열린 집합이 된다.((Rudin, 1976) 정리 4.8) 보통 위상수학 교과서에서는 '함수 f가 x에서 연속'이라는 것을 (****1)과 같이 표현하고, 그냥 '연속함수'는

'U가 열린 집합일 때 $f^{-1}(U)$가 열린 집합' (****2)

을 만족하는 함수로 정의한다. 연속함수를 (****2)와 같이 정의하면 그 개념을 직관적으로 파악하기는 힘들지만 표현이 아주 단순해지고 수학이론에서 연속함수를 다루기가 아주 편리해진다. 가장 대표적인 예가 (Rudin, 1976) 정리 4.14-4.16의 최대-최소 정리의 증명이라 할 수 있다. (정리 4.14가 아주 간결하게 증명된다.) 이제 곧 설명하듯, 위상의 개념을 일반화할 때는 이 정의 (****1)과 (****2)가 성립하여야 한다는 것이 매우 중요한 역할을 한다.

3 드디어, 위상의 일반화

이제 정의 1에서 주어진 위상의 정의를 구성하도록 하자. 어떤 개념을 일반화한다는 것은 결국 그 개념이 보다 많은 상황들에 적용될 수 있도록 가장 핵심적인 부분만을 간추려 간략하게 표현한다는 의미일 것이다. 바로 지금 여기서 하는 작업이 유클리드 공간 $\mathbb{R}^k$의 위상 $\mathscr{T}$의 개념을 일반화하는 것이다.

우선 정의 1의 조건들을 다시 한번 반추해 보자.

(1) $X \in \mathscr{T}$, $\emptyset \in \mathscr{T}$

(2) 임의의 $\mathscr{T}$의 부분집합 S에 대하여 $\bigcup_{U \in S} U \in \mathscr{T}$ 이다.

(3) 임의의 $\{U, V\} \in \mathscr{T}$ 에 대하여 $U \cap V \in \mathscr{T}$ 이다.

이 정의를 잘 살펴보면 포함관계, 합집합, 교집합 같은 집합론적인 개념만 사용되었음을 즉시 알 수 있다. 앞에서 잠깐 언급하였듯이, 위상이라는 개념을 일반화하는 데는 집합론적인 개념만을 사용하여 극한을 다룬다는 기본 이념이 깔려 있다.

우선 (1)을 보자. $X \in \mathscr{T}$ 를 명시해두어야 하는 이유는 무엇일까? 근방의 정의 1)에 의하여, X가 열린 집합이라는 것은 X가 어떤 집합이냐에 상관없이 자명한 사실이다. (열린 집합이란 자신의 모든 원소의 근방이 되는 집합임을 상기하라.) 따라서 $X \notin \mathscr{T}$ 라면, $\mathscr{T}$ 는 '위상' 즉 '모든 열린 집합의 집합'이라고는 절대 말할 수 없는 것이다. 그럼 조건 $\emptyset \in \mathscr{T}$ 는? 다음 명제를 보자:

'$x \in \emptyset$ 이면 $\emptyset$은 x의 근방이다.'

이 명제는 참일까, 거짓일까? 이 명제는 조건문이고 조건문의 가정이 거짓이므로 참이다. 따라서 $\emptyset$은 열린 집합이다. 정말 허탈해 보일지도 모르지만, 이런 상황은 실제로 수학에 있어서 상당히 자주 발생한다. (영어로 이런 상황을 vacuously true라 한다.) 어쩌면 이런 것은 우리가 집합론에서 기호논리를 사용함으로 인하여 어쩔 수 없이 치러야 하는 댓가일지도 모르겠다. 간단히 말해, 조건 (1)은 위상수학에서 집합론을 사용함으로 인하여 생기는, 사실 별 의미는 없지만 수학이론 체계의 논리적 일관성을 위하여 반드시 점검해 두기는 해야 하는 조건이라 할 수 있다.

이제 조건 (3)을 보자. 근방의 정의 1)과 열린 집합은 자신의 임의의 원소의 근방이라는 사실로부터, U와 V가 열린 집합이면 $U \cap V$도 열린 집합이라는 것을 즉시 보일 수 있다. 여기서 잠깐 이런 생각을 해보자: 왜 하필 2개의 열린 집합의 교집합을 생각하는가? 2개의 열린 집합의 교집합이 열린 집합이라는 것은 결국 유한개의 열린 집합의 교집합이 열린 집합이라는 것과 동치이다.(수학적 귀납법을 이용하여 쉽게 보일 수 있다.) 그러면 다시, 왜 하필 유한개의 교집합인가? 바로 여기서 '수열의 극한' 개념이 중요하게 고려된다. x에 수렴하는 수열이란 결국 그 크기가 자연수 집합과 같은 집합이고, x의 근방인 열린 집합은 이 집합의 무한부분집합을 포함하여야 하는데, 그런 열린 집합들 무한개의 교집합을 열린 집합으로 간주한다면 이 열린 집합이 수열의 무한부분집합을 포함하는 것이 불가능해질 가능성이 있다. 예를 들어, $\mathbb{R}$에서 수열 $\{1/n\}$과 0의 근방의 집합 $\{(-1/n, 1/n)\}$을 생각해 보면 $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-1/n, 1/n)$은 $\{1/n | n = 1, 2, \cdots\}$과 서로 소이다. 즉 조건 (3)은 극한이라는 개념을 열린 집합을 이용하여 다룰 수 있게 하는 가장 기본적인 조건이라 할 수 있다.

이제 조건 (2)를 살펴보도록 하자. 조건 (2)와 (3)을 비교해 보면 왜 조건 (2)에서는 임의 개수의 합집합을 허용하면서 조건 (3)에서는 유한 개수의 교집합만을 허용하는지 의아할 것이다. 사실 $\mathbb{R}^k$에서의 근방의 정의 1)과 열린 집합은 자신의 임의의 원소의 근방이라는 사실로부터, 열린 집합의 임의의 개수의 합집합은 열린 집합이라는 것은 자명하다. 그런데 수열의 극한을 다룬다는 목적에 있어서는 조건 (2)는 사실 전혀 도움이 되지 않는다. U가 x의 근방이라 하자. 그러면 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$인 임의의 수열 $\{x_n\}$에 대하여 $x \geq N \Longrightarrow x_n \in U$인 자연수 N이 존재한다.

그런데 그러면 임의의 집합 V에 대하여 $n \geq N \implies x_n \in U$가 성립한다! 즉, 극한을 다루는 데 있어서는 근방의 합집합을 고려할 필요는 없는 것이다. 그러면 조건 (2)는 왜 위상의 정의에 포함된 것이며, 또 왜 하필 '임의의' 개수의 합집합이어야 하는가? 그것은 바로 연속함수의 정의 (****1)과 (****2)를 성립하게 만들기 위한 것이다.

(****1)과 (****2)를 잘 살펴보자. 연속함수의 정의를 근방의 개념을 가지고 표현하려면 (****1)만 있으면 충분하다. 그런데 (****2)가 성립하려면, 앞 절에서 $f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} V_x$이므로, 결국 열린 집합 V_x들의 합집합 $\bigcup_{x \in U} V_x$가 열린 집합이어야 한다는 보장이 있어야 하는 것이다. 앞 절의 경우 $\mathbb{R}^k$에서의 열린 집합의 정의에 의하여 이것이 보장되었지만, 집합의 포함관계 이외의 아무런 도구도 없이 위상의 일반화된 정의를 만들어가고 있는 지금의 시점에서는 $\bigcup_{x \in U} V_x$가 열린 집합이라는 보장은 어디에도 없다. 따라서 위상의 정의에 조건 (2)를 명시하여야 하는 것이다.

이리하여 조건 (1),(2),(3)이 모두 정당화되었다. 여기서 이런 생각을 해볼 수 있다: 어떻게 이런 식으로, 그리고 하필 (다른 조건들은 포함하지 않고) 이런 조건들만으로 위상을 정의할 생각을 할 수 있었을까? 여기에 대한 대답은, '극한'의 개념을 일반화하여 사용할 수 있는 수많은 상황들을 모두 고려한 끝에 이러한 조건들을 추려내었다고 할 수 있다. 사실 이 '수많은 상황들'의 복잡다기함이란 일반인의 상상을 초월하는 것이다. 가장 대표적인 예가 평셔널 해석학에서 사용되는 함수공간과 대수기하학에서 사용하는 대수적 다양체(algebraic variety)라 할 수 있다. 대수적 다양체에서는 자리스키 위상(Zariski topology)이라는 것을 사용하는데, 아마도 위상 개념의 추상성의 가장 대표적인 예일 것이다. (함수공간의 위상도 꽤 복잡하기는 하지만 거리함수 개념을 꽤 잘 활용하기 때문에 자리스키 위상보다는 좀더 직관적이다.) 이러한 상황들을 모두 고려하여 위상과 같은 추상개념을 구축해내는 사람들의 학문수준이란 당연히 어린 학생들의 상상을 가볍게 초월한다. 그리고 이런 학문수준을 따라가는 것이 학생들의 교육의 중요한 부분을 차지한다. 그러나 적절한 시점에 이와 같은 직관적인 사고의 근원을 따라가 보는 기회는 학생들에게 주어져야 한다.

이제 위상 및 열린 집합을 이와 같이 정의하여 다루는 위상수학적인(즉 극한 개념을 다루는데 필요한) 개념들을 설명하기로 하자. 우선 위상의 기저(base 또는 basis)의 개념을 들여다보자.

4 위상의 기저

앞에서 극한 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$를 정의하기 위하여 $\epsilon - \delta$를 사용하여

$$\forall \epsilon > 0, \exists \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \implies |x_n - x| < \epsilon$$

와 같이 나타내었는데, 이것을 x의 근방 $B_\epsilon(x)$를 이용하여 나타내면

$$\forall \epsilon > 0, \exists \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow x_n \in B_\epsilon(x) \quad (*)$$

와 같이 되었다. 이것은 $B_\epsilon(x)$ 대신 $C_\epsilon(x)$를 사용하여

$$\forall \epsilon > 0, \exists \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow x_n \in C_\epsilon(x) \quad (*')$$

와 같이 나타낼 수도 있다는 것을 잠시 언급했는데, 여기서는 (*)와 (*)가 똑같이 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$를 나타냄을 위상을 이용하여 증명할 것이다. 이것을 위하여 위상의 기저(base 또는 basis) 개념을 사용한다.

우선 위상의 기저를 정의하자.

정의 2. X가 집합이고 X의 부분집합의 집합 $\mathscr{B}$가 다음을 만족할 때 $\mathscr{B}$는 X의 위상의 기저(base of topology of X)라 한다:

(1) 임의의 $x \in X$에 대하여 $x \in B$인 $B \in \mathscr{B}$가 존재한다.

(2) $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$일 때 임의의 $x \in B_1 \cap B_2$에 대하여 $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$인 $B_3 \in \mathscr{B}$가 존재한다.

이 때 $\mathscr{T} = \left\{ \bigcup_{i \in K} B_i \middle| \forall i \in K, B_i \in \mathscr{B} \right\}$, 즉 $\mathscr{T}$를 $\mathscr{B}$의 임의의 원소들의 합집합의 집합으로 정의하면 $\mathscr{T}$는 정의 1의 (1)-(3)을 만족하고 따라서 X의 위상이 됨을 쉽게 보일 수 있다. 이 때 이 $\mathscr{T}$를 기저 $\mathscr{B}$에 의하여 생성된 위상(topology generated by $\mathscr{B}$)이라 한다. 어떤 위상 $\mathscr{T}'$이 $\mathscr{B}$의 원소를 모두 포함하면 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$임은 자명하다. 따라서 $\mathscr{T}$는 $\mathscr{B}$의 원소를 모두 포함하는 가장 작은 위상이라 할 수 있다. 즉, 어떤 위상의 기저를 $\mathscr{B}$로 준다는 것은 적어도 $\mathscr{B}$의 원소들은 열린 집합으로 간주하도록 한다는 의미이다.

예) 기저 $\mathscr{B}_1$을 $\{B_\epsilon(x) | x \in \mathbb{R}^k, \epsilon > 0\}$로 놓으면, 이 집합 $\mathscr{B}_1$은 정의 2의 조건 (1),(2)를 만족하는 것을 쉽게 보일 수 있다.((2)는 삼각부등식을 이용하여 증명) 이 $\mathscr{B}_1$에 의하여 생성된 위상은 $\mathbb{R}^k$의 유클리드 위상임은 자명하다.

기저 $\mathscr{B}_2$를 $\{C_\epsilon(x) | x \in \mathbb{R}^k, \epsilon > 0\}$($C_\epsilon(x) = \{y | d'(x,y) < \epsilon\}$, $d'(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$)로 놓으면, $d'(x,y)$가 거리함수임을 이용하여 마찬가지로 $\mathscr{B}_2$가 정의 2의 조건 (1),(2)를 만족함을 보일 수 있다. 이 기저 $\mathscr{B}_2$에 의하여 생성되는 위상도 의 유클리드 위상과 같음을 조금 후에 증명할 것이다.

위상의 기저를 사용할 수 있으면 여러 가지 편리한 점들이 있다. 우선 위의 (*)로부터 극한

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$를 다음과 같이 정의할 수 있다:

정의 3. 공간 X의 위상이 $\mathscr{T}$로 주어질 때, X에서의 수열 $\{x_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$이란 다음과 같이 정의된다: x를 포함하는 임의의 열린 집합 U에 대하여 어떤 $N \in \mathbb{N}$이 존재하여

$$n \geq N \Longrightarrow x_n \in U$$

를 만족한다. (*2)

그러면 다음 정리가 성립함을 쉽게 보일 수 있다:

정리 1. 위상 $\mathscr{T}$가 기저 $\mathscr{B}$에 의하여 생성된 위상일 때, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$은 다음과 동치이다:

x를 포함하는 임의의 $B \in \mathscr{B}$에 대하여 어떤 $N \in \mathbb{N}$이 존재하여

$$n \geq N \Longrightarrow x_n \in B$$

를 만족한다. (*3)

증명) ($\Longrightarrow$) $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$이므로 임의의 $B \in \mathscr{B}$에 대하여 $B \in \mathscr{T}$이고, 따라서 (*2)가 성립하면 (*3)도 성립함은 자명하다.

($\Longleftarrow$) x를 포함하는 임의의 열린 집합 U에 대하여, $\mathscr{B}$는 $\mathscr{T}$의 기저이므로 $U = \bigcup_{i\in K} B_i$이고, $\{B_i\}_{i\in K} \subset \mathscr{B}$의 원소 중에는 $x \in B_i$인 것이 반드시 존재한다. (아니면 $x \notin U$이므로 모순) 따라서 $x \in B_i \subset U$인 B_i가 존재하고, 이 B_i가 (*3)의 B가 된다. □

한편 다음과 같이 매우 중요한, 서로 다른 기저가 생성하는 위상들의 관계를 보여주는 정리도 성립한다:

정리 2. 집합 X에 대하여 X의 두 위상 $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$가 각각 기저 $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$를 가질 때, 다음 두 명제는 동치이다.

1) $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$
2) 임의의 $x \in X$에 대하여 $x \in B_1 \in \mathscr{B}_1$이면 $x \in B_2 \subset B_1$인 $B_2 \in \mathscr{B}_2$가 존재한다.

증명) 1)⟹2): $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$ 이면 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $x \in B_1 \in \mathscr{B}_1$ 이면 $V \in \mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$ 이고, 그러면 기저의 정의에 의하여, 정리 1의 증명에서와 같이 $x \in B_2 \subset B_1$ 인 $B_2 \in \mathscr{B}_2$ 가 존재한다.

2)⟹1): 임의의 $V \in \mathscr{T}_1$ 에 대하여, $\mathscr{B}_1$ 은 $\mathscr{T}_1$ 의 기저이므로 $x \in V$ 일 때 $x \in B_{1x} \subset V$ 인 $B_{1x} \in \mathscr{B}_1$ 가 존재한다. 그러면 2)에 의하여 각각의 B_{1x} 에 대하여 $x \in B_{2x} \subset B_{1x}$ 인 $B_{2x} \in \mathscr{B}_2$ 가 존재하고 $V = \bigcup_{x \in V} B_{2x}$ 가 된다. $\mathscr{B}_2$ 는 $\mathscr{T}_2$ 의 기저이므로 $V \in \mathscr{T}_2$ 이다. 따라서 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$. □

예) 기저 $B_\epsilon(x) = \{y \| x - y| < \epsilon\}$ 의 집합 $\mathscr{B}_1$ 에 의하여 생성된 위상은 $\mathbb{R}^k$ 의 유클리드 위상 $\mathscr{T}_1$ 이다. 이제 $C_\epsilon(x) = \{y | d'(x, y) < \epsilon\}$, $d'(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$ 의 집합 $\mathscr{B}_2$ 에 의하여 생성된 위상 $\mathscr{T}_2$ 가 $\mathscr{T}_1$ 과 같음을 보이자. 그러면 정의 3에 의하여 $(*)$ 와 $(*')$ 이 똑같이 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 를 나타내게 되는 것이 자명하다.

정리 2에 의하여,

임의의 $x \in \mathbb{R}^k$ 에 대하여 $x \in B_\epsilon(x')$ 일 때 $x \in C_\delta(x) \subset B_\epsilon(x')(\delta > 0)$ 인 $C_\delta(x)$ 가 존재함 (#1)을 보이면 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$ 가 증명되고,

임의의 $x \in \mathbb{R}^k$ 에 대하여 $x \in C_\epsilon(x')$ 일 때 $x \in B_\delta(x) \subset C_\epsilon(x')(\delta > 0)$ 인 $B_\delta(x)$ 가 존재함 (#2)을 보이면$\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$ 이 증명된다.

증명) (#1): $\epsilon' = \epsilon - |x - x'|$이라 하면, 삼각부등식에 의하여 $B'_\epsilon(x) \subset B_\epsilon(x')$ 이고 거리함수 d' 의 정의에 의하여 $C'_\epsilon(x) \subset B'_\epsilon(x)$ 이므로 $\delta = \epsilon'$ 이라 하면 $x \in C_\delta(x) = C'_\epsilon(x) \subset B_\epsilon(x')$ 이 되어 (#1)이 성립한다.

(#2): $\epsilon' = \epsilon - d(x, x')$ 이라 하면, 삼각부등식에 의하여 $C'_\epsilon(x) \subset C_\epsilon(x')$ 이고, $\delta = \epsilon'/k$ 라 하면 거리함수 d' 의 정의에 의하여 $B_\delta(x) \subset C'_\epsilon(x)$ 이므로, $x \in B_\delta(x) \subset C'_\epsilon(x) \subset C_\epsilon(x')$ 이 되어 (#2)가 성립한다.

이제 수학의 모든 분야에서 아주 중요하게 사용되는 위상을 위상의 기저를 이용하여 정의하자. 두 집합 X_1, X_2 가 각각 위상 $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ 를 가질 때 곱집합 $X_1 \times X_2$ 의 위상 $\mathscr{T}$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다: $\mathscr{B} = \{U_1 \times U_2 | U_1 \in \mathscr{T}_1, U_2 \in \mathscr{T}_2\}$ 가 $X_1 \times X_2$ 의 기저의 정의 (1),(2)를 만족함은 자명하다. 이 때 $\mathscr{T}$ 는 $\mathscr{B}$ 에 의하여 생성되는 위상으로 정의한다. 이러한 위상을 곱위상(product topology)이라 한다.

그러면 위상 $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ 의 기저가 각각 $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ 일 때, $\mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2$ 는 $\mathscr{T}$ 의 기저가 됨을 정리 2에 의하여 쉽게 보일 수 있다.

마찬가지로, k 개의 집합 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 가 각각 위상 $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2, \cdots, \mathscr{T}_k$ 를 가질 때 곱집합 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$ 의 위상 $\mathscr{T}$ 는 $\mathscr{B} = \{U_1 \times \cdots \times U_k | U_i \in T_i\}$ 를 기저로 하는 위상으로 정의되고 $\mathscr{B}_1 \times \cdots \times \mathscr{B}_k$ 는 $\mathscr{T}$ 의 기저가 된다.

예) $\mathbb{R}$ 이 유클리드 위상을 가질 때, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 의 곱위상 $\mathscr{T}_1$ 은 거리 $|x-y|$에 의하여 정의되는 $\mathbb{R}^2$ 의 유클리드 위상 $\mathscr{T}_2$ 와 같음을 보이자. 정리 2에 의하여, 임의의 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ 에 대하여 $(x,y) \in B_\epsilon(\vec{p})$ 일 때 $x \in (x-\delta_1, x+\delta_1) \times (y-\delta_2, y+\delta_2) \subset B_\epsilon(\vec{p})(\delta > 0)$ 인 $(x-\delta_1, x+\delta_1) \times (y-\delta_2, y+\delta_2)$ 가 존재함(##1)을 보이면 $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$ 이 증명되고, 임의의 $\vec{p} \in \mathscr{R}^2$ 에 대하여 $\vec{p} \in (x-\delta_1, x+\delta_1) \times (y-\delta_2, y+\delta_2)$ 일 때 $\vec{p} \in B_\epsilon(\vec{p}) \subset (x-\delta_1, x+\delta_1) \times (y-\delta_2, y+\delta_2)(\epsilon > 0)$ 인 $B_\epsilon(\vec{p})$ 가 존재함(##2)을 보이면 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$ 가 증명된다.

(##1): $\epsilon' = \epsilon - |(x,y) - \vec{p}|$이라 하면 삼각부등식에 의하여 $B'_\epsilon((x,y)) \subset B_\epsilon(\vec{p})$ 이고, 이 때 $\delta_1 = \delta_2 = \dfrac{\epsilon'}{2}$ 이라 하면 $x \in (x-\delta_1, x+\delta_1) \times (y-\delta_2, y+\delta_2) \subset B'_\epsilon((x,y)) \subset B_\epsilon(\vec{p})$ 이므로 성립.

(##2): $\vec{p} = (p_1, p_2)$(순서쌍) 일 때 $\vec{p} \in (x-\delta_1, x+\delta_1) \times (y-\delta_2, y+\delta_2)$(열린 구간의 곱집합) 이면, $(p_1 - \eta_1, p_1 + \eta_1) \subset (x-\delta_1, x+\delta_1)$, $(p_2 - \eta_2, p_2 + \eta_2) \subset (y-\delta_2, y+\delta_2)$ 을 만족하는 $\eta_1, \eta_2 > 0$가 존재한다. $\epsilon = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ 라 하면

$$\vec{p} \in B_\epsilon(\vec{p}) \subset (p_1-\eta_1, p_1+\eta_1) \times (p_2-\eta_2, p_2+\eta_2) \subset (x-\delta_1, x+\delta_1) \times (y-\delta_2, y+\delta_2)$$

이므로 성립.

이와 같이 위상 사이의 포함관계, 동치관계를 명확하게 밝히는 것이 위상의 기저 개념의 가장 중요한 응용이라 할 수 있다.

5 부분기저

위에서 어떤 위상의 기저를 $\mathscr{B}$ 로 준다는 것은 적어도 $\mathscr{B}$ 의 원소들은 열린 집합으로 간주하도록 한다는 의미라고 언급하였다. 즉 극한을 정의하기 위해서 어떤 점의 근방으로 사용할 수 있는 집합 중에 적어도 주어진 기저 $\mathscr{B}$ 의 원소가 포함되어야 한다는 얘기다. 그런데 이것은 집합 $\mathscr{B}$ 가 정의 2의 조건 (1),(2)를 만족하여 기저가 될 때만 성립한다. 그렇다면 X 의 어떤 부분집합의 집합 $\mathscr{S}$ 에 대하여, 적어도 $\mathscr{S}$ 의 원소들을 근방으로 사용할 수 있도록 하기 위해서는 X 의 위상을 어떻게 주어야 할까? 해결책은 $\mathscr{S}$ 를 포함하는 X 의 위상의 기저 $\mathscr{B}$ 를 구성하여 이 기저로부터 X 의 위상을 얻는 것이다. 이 때 $\mathscr{S}$ 를 기저 $\mathscr{B}$ 의 부분기저(subbase 또는 subbasis)라 하고, $\mathscr{B}$ 로부터 얻은 위상 $\mathscr{T}$ 를 $\mathscr{S}$ 에 의하여 생성된 X 의 위상(topology on X generated by $\mathscr{S}$)이라 한다.

정의 4. 집합 X 의 부분집합의 집합 $\mathscr{S}$ 가 $\bigcup_{S \in \mathscr{S}} S = X$ 를 만족할 때, $\mathscr{S}$ 를 X 의 위상의 부분기저라 한다. 이 때 집합 $\mathscr{B} = \{S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n | S_i \in \mathscr{S}, i = 1, 2, \cdots, n\}$, 즉 $\mathscr{S}$ 의 유한개의 원소들의 교집합의 집합은 정의 2의 조건 (1),(2)를 만족함을 쉽게 보일 수 있다. 이 집합 $\mathscr{B}$

를 $\mathscr{S}$ 에 의하여 생성된 X 의 위상의 기저라 하며, $\mathscr{B}$ 에 의하여 생성된 위상 T 를 $\mathscr{S}$ 에 의하여 생성된 X 의 위상(topology on X generated by $\mathscr{S}$)이라 한다.

조건 $\bigcup_{S\in\mathscr{S}} S = X$ 를 만족하는 모든 집합 $\mathscr{S}$ 로부터 최소한 $\mathscr{S}$ 의 원소들은 근방으로 사용할 수 있는 위상을 구성할 수 있다.

이제 위에서 정의된 것과 같은 위상의 성질을 이용하여 컴팩트성과 연결성의 성질을 다루기로 하자.

6 컴팩트성 (compactness)

컴팩트성의 정의는 과연 어떻게 구성한 것일까? 일단 다음의 볼차노-바이어슈트라스(Bolzano-Weierstrass) 정리를 상기하자. ((Rudin, 1976) 정리 2.42)

볼차노-바이어슈트라스 정리. 닫힌 구간 $[a, b]$ 에 속하는 임의의 수열은 수렴하는 부분수열을 가진다.

이 정리는 해석학에서 여러모로 쓸모가 많은 정리이다. 컴팩트성이란 바로

'임의의 수열이 수렴하는 부분수열을 가진다.' (*****)

라는 성질을 열린 집합을 사용하여 보다 간단히 표현하기 위해 만들어진 개념이다. 이 성질로부터 나오는, 열린 집합만을 이용하여 표현되는 간단한 성질을 표현하기 위하여 보조정리 하나와 정의 하나를 살펴보자.

보조정리 : $X \subset \mathbb{R}^n$ 에서 $\{x_n\} \subset X$ 이 수렴하는 부분수열을 가지지 않는 수열일 때, 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $(B_{\epsilon_x}(x) - \{x\}) \cap \{x_n\} = \emptyset$ 인 $\epsilon_x > 0$ 가 존재한다.

증명) 어떤 $x \in X$ 에 대하여 주어진 $\epsilon_x > 0$ 가 존재하지 않는다면, 임의의 n 에 대하여 $S_n = (B_{1/n}(x) - \{x\}) \cap \{x_n\} \neq \emptyset$ 이다. 이 때 만약 어떤 S_n 이 유한집합이라면 $\frac{1}{N} < \min_{x_i\in X_n} |x_i - x|$ 일 때, 모든 $x_i \subset S_N$ 은 $x_i \in B_{1/N}(x)$ 이므로 $S_N = (B_{1/N}(x) - \{x\}) \cap \{x_n\} = \emptyset$ 이고, 이것은 임의의 $S_n \neq \emptyset$ 임에 모순이다. 따라서 임의의 S_n 은 무한집합이다.

이 때 $x_{i_1} \in S_1$ 을 임의로 선택하고, x_{i_2} 를 $x_{i_2} \subset S_2$ 이고 원래 수열 $\{x_n\}$ 에서 x_{i_1} 의 뒤에 오도록 선택하며, $\cdots$, $x_{i_n} \in S_n$ 을 $x_{i_n} \in S_n$ 이고 $\{x_n\}$ 에서 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_{n-1}}$ 의 뒤에 오도록 선택하고, $\cdots$ 와 같이 계속하면 (임의의 S_n 은 무한집합이므로 이러한 선택이 항상 가능) $|x_{j_n} - x_n| < \frac{1}{n}$

이므로 $\{x_{i_n}\}$은 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$인 $\{x_n\}$의 부분수열이다. 이것은 $\{x_n\}$이 수렴하는 부분수열을 가지지 않음에 모순이다. $\square$

정의. 어떤 집합 X와 열린 집합의 집합 $\mathscr{S}$에 대하여, $X \subset \bigcup_{s\in\mathscr{S}} s$이면 $\mathscr{S}$를 X의 열린 덮개(open cover)라 하고, $\mathscr{S}$의 유한부분집합 $\mathscr{S}^* = \{s_1, \cdots, s_n\} \subset \mathscr{S}$에 대하여 $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} s_i$일 때 $\mathscr{S}^*$는 $\mathscr{S}$의 유한 부분덮개(finite subcover)라 한다.

$\{x_n\} \subset X$이 수렴하는 부분수열을 가지지 않는 수열일 때, 임의의 $x \in X$에 대하여 보조정리에 의하여 얻어지는 $B_{\epsilon_x}(x)$를 생각하면, $\{B_{\epsilon_x}(x)\}_{x\in X}$는 X의 열린 덮개이고 $x_i \in \{x_n\}$일 때 $B_{\epsilon_{x_i}}(x_i) \cap \{x_n\} = \{x_i\}$, $x \notin \{x_n\}$일 때 $B_{\epsilon_x}(x) \cap \{x_n\} = \emptyset$이다.

그런데 $\{x_n\}$은 수렴하는 부분수열을 가지지 않으므로 무한집합이고, $\{B_{\epsilon_{x_i}}(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$의 각 원소 $B_{\epsilon_{x_i}}(x_i)$는 $\{x_n\}$의 원소 중 오직 x_i만을 포함하고 $\mathscr{S}$의 다른 원소들은 $\{x_n\}$의 원소를 포함하지 않으므로 합집합이 X를 포함하는 $\mathscr{S}$의 임의의 부분집합은 $\mathscr{S}'$을 포함한다. 따라서 $\mathscr{S}$는 유한 부분덮개를 가질 수 없다.

따라서, X가 (*****)를 만족하지 않으면 X는 유한 부분덮개를 가지지 않는 열린 덮개를 가지게 된다. 이것의 부정이 바로 컴팩트성의 정의이다.

정의 5. 집합 K의 임의의 열린 덮개에 대하여 유한 부분덮개가 존재할 때, K를 컴팩트 집합이라 한다.

일단 이렇게 컴팩트 집합을 정의하면 아주 여러 가지 좋은 성질이 있는데, 예를 들어 $\mathbb{R}^k$의 컴팩트 부분집합은 닫히고 유계인 집합이 된다. ((Rudin, 1976) 정리 2.41) 이것을 이용하면, 예를 들어, 최대-최소 정리를 아주 간단하게 증명할 수 있다.

7 연결성 (connectedness)

어떤 집합이 '연결되어 있다'는 것은 무슨 뜻인가? '떨어져 있지 (separated) 않다'는 뜻이다. 그런데 '떨어져 있다'는 것은 과연 어떤 것인가? 예를 들어 닫힌 구간 $[0,1]$을 생각해 보자. $A = \left[0, \frac{1}{2}\right]$이고 $B = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$이라 하자. 이들은 '떨어져' 있는가?

여기서 이런 생각을 해 보자: 서로 소이고 공집합이 아닌 두 집합 A, B가 '떨어져' 있다면, 한 집합의 원소들은 다른 집합의 원소에 '무한히 가깝게 접근할' 수 없지 않을까? 즉 한 집합의 점의 수열의 극한이 될 수 있는 점이 다른 한 집합에 포함되는 일이 없지 않을까?

'집합 A의 점의 수열의 극한이 될 수 있는 (그리고 A의 원소가 아닌) 점'이란 다음과 같은 점이다:

예) $A \subset \mathbb{R}^n$에서 점 $x \in A$에 대하여, 임의의 $B_\epsilon(x)$에 대하여 $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$이면, 임의의 n에 대하여 $x_n \in B_{1/n}(x) \cap A$가 존재하고, 수열 $\{x_n\}$은 $\lim_{n\to\infty} x_n = x \notin A$를 만족한다.

즉 $x \notin A$이고 x를 포함하는 임의의 열린 집합 U에 대하여 $U \cap A = \emptyset$이면 x는 A의 원소가 아닌, A의 점의 수열의 극한이 될 수 있는 점이 된다. 이와 같은 점을 A의 극한점(limit point)이라 하고, A의 극한점의 집합을 A'이라 할 때, $\bar{A} = A \cup A'$을 A의 폐포(closure)라 한다.

그러면, 공집합이 아닌 두 집합 A, B가 '떨어져 있다(separated)'는 것은

$$A \cap B = \emptyset, \bar{A} \cap B = \emptyset, A \cap \bar{B} = \emptyset \qquad (*)$$

으로 나타낼 수 있다. 이 때 공간 X에 공집합이 아닌 두 집합 A, B가 존재하여 $A \cup B = X$이고 (*)를 만족하면 X는 '연결된' 공간이 아님을 알 수 있다.

예) 닫힌 구간 $[0,1]$의 부분집합 $A = \left[0, \frac{1}{2}\right]$과 $B = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$은 떨어져 있는가?

그렇지 않다. $A \cap \bar{B} = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right] = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

공간 X의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B가 $A \cup B = X$와 (*)를 만족하는 것을 '열린 집합'만으로 어떻게 표현할 수 있을까? $A \subset \bar{A}$, $A \cap B = \emptyset$, $\bar{A} \cap B = \emptyset$이므로 $B = A^c = (\bar{A})^c$이다. 그러면 임의의 $x \in (\bar{A})^c = B$에서, $x \in U_x$이고 $U_x \cap A = \emptyset$인 열린 집합 U_x가 존재한다. (아니면, $x \in A$ 또는 x는 A의 극한점이 되므로 모순) 이 때 $U_x \cap A = \emptyset$이므로 $U_x \subset A^c = B$이고, 따라서 $B = \bigcup_{x \in B} U_x \subset B \Rightarrow B = \bigcup_{x \in B} U_x$가 되어 B는 열린 집합이다. 마찬가지로 A는 열린 집합이다.

따라서 공집합이 아닌 A, B가 $A \cup B = X$와 (*)를 만족할 때, 이들은 다음과 같이 나타내어 진다:

'$A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$이고 A, B는 X의 열린 집합'

이러한 두 집합 A, B를 X의 분리(separation)라 한다.

정의 6. 집합 X에서, $A, B \subset X$가 $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$이고 A, B는 X의 열린 집합이면 (A, B)을 X의 분리라 하고, X의 분리가 존재하지 않으면 X는 연결되었다(connected)

고 한다. (&2)

(Rudin, 1976)에서는 연결성의 정의 (&1)을 사용하고, 이 정의에 의하여 실수 $\mathbb{R}$의 구간 (interval)이 연결되었음을 증명한다. ((Rudin, 1976) 정리 2.47) 이보다 더 복잡하게 생긴 집합의 연결성은 어떻게 증명할까? 여러 가지 방법이 있으나 여러 가지 상식적으로 생긴 집합의 연결성을 증명하는 데 편리하게 사용할 수 있는 방법 한 가지만 거론하기로 하자.

정의 7. 집합 X의 두 점 $a, b \in X$에 대하여 연속함수 $\sigma : [0,1] \to X$가 존재하여 $\sigma(0) = a$, $\sigma(1) = b$이면 σ는 a와 b를 연결하는 경로(path)라 하고, X의 임의의 두 점 $p, q \in X$에 대하여 p와 q를 연결하는 경로가 존재할 때 X를 길연결(path-connected)이라 한다.

정리 3. 길연결된 공간은 연결이다.

증명) X가 길연결이고 연결이 아니라 하자. 그러면 X의 분리 $\{A, B\}$가 존재한다. 이 때 $a \in A$, $b \in B$라 하고 $\sigma : [0,1] \to X$를 a, b를 연결하는 경로라 하면, $\sigma(0) = a$, $\sigma(1) = b$라 할 때 $0 \in \sigma^{-1}(A)$, $1 \in \sigma^{-1}(B)$이므로 $\sigma^{-1}(A) \neq \phi$, $\sigma^{-1}(B) \neq \phi$이고, A, B는 열린 집합이므로 $\sigma^{-1}(A)$, $\sigma^{-1}(B)$도 열린 집합이다. 따라서 $\{\sigma^{-1}(A), \sigma^{-1}(B)\}$는 $[0,1]$의 분리가 되는데 $[0,1]$은 연결된 집합이므로 모순이다.

8 위상을 사용해야 하는 이유

지금까지 (Rudin, 1976)에 주어진 위상수학적 개념들의 직관적인 면을 소개하고 변수가 1~3개 정도인 함수의 해석학에서 사용하기에 요긴한 지식들의 보충설명을 제공하였다. 마지막으로 짚고 넘어가야 할 것은, 과연 위상수학을 해석학에서 사용하는 것이 필수적인가 하는 것이다. 예를 들어 위에 설명한 컴팩트성이나 연결성을 이용하면 $\mathbb{R}$에서의 최대-최소 정리, 중간값 정리 및 볼차노-바이어슈트라스 정리를 아주 간단하게 증명할 수 있다. 그러나 이 정리들은 위상수학이 없이도 증명 가능한 것들이다. 그렇다면 추상적인 이론 없이 증명하는 것을 추구하는 것이 훨씬 건전한 수학이 아닐까?

여기에 대한 답으로서, 매우 직관적이고 상식적이지만 위상수학을 사용하지 않으면 증명이 아주 힘들고 지저분해지는 예를 하나 들도록 하겠다.

예) 집합 $X = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$에 대하여, 다음이 성립한다.

1) 최대-최소 정리: 임의의 연속함수 $f : X \to \mathbb{R}$ 에 대하여 $f(\vec{x}_0) = \min_{\vec{x}\in X} f(\vec{x}), f(\vec{x}_1) = \max_{\vec{x}\in X} f(\vec{x})$ 인 $\vec{x}_0, \vec{x}_1 \in X$ 가 존재한다.

2) 중간값 정리: 임의의 연속함수 $f : X \to \mathbb{R}$ 에 대하여 $f(a) < f(b)$ 이면 임의의 $m \in (f(a), f(b))$ 에 대하여 $f(c) = m$ 인 $c \in X$ 가 존재한다.

3) 볼차노-바이어슈트라스 정리: 임의의 점의 수열 $\{\vec{x}_i\} \subset X$ 에 대하여 수렴하는 부분수열이 존재한다.

증명) 1) X 는 컴팩트이므로($\because \mathbb{R}^2$ 에서 닫힌 집합이고 유계) $f(X) \subset \mathbb{R}$ 도 컴팩트이고, 따라서 닫힌 집합이고 유계이다. 그러면 $M = \sup f(X)$, $m = \inf f(X)$ 가 존재하고, $f(X)$ 는 닫힌 집합이므로 $M, m \in f(X)$ 이다. 따라서 정리가 증명된다.

2) X 는 길연결이므로 연결이고, 따라서 $f(X) \subset \mathbb{R}$ 는 연결이다. 따라서 $f(X)$ 는 구간(interval)이 되고, 원하는 결과가 성립한다.

3) X 는 컴팩트이므로 당연. □

이와 같이 $X = [a, b]$ 인 경우에 성립하는 증명들이 매우 자연스럽게 확장된다. 이와 같은 개념의 확장은 $X = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$ 보다 훨씬 복잡한 공간들에 대해서도 자연스럽게 확장되어 요긴하게 사용된다. 이런 것이 바로 추상적인 수학을 공부해 둘 필요가 있는 이유이다.

부기: 이 글의 내용은 사실 실제 수학사와는 거의 무관한, 위상수학의 추상개념을 공부하는 학생들의 편의를 위한 본 저자의 창작인데, 특히 컴팩트성에 대해서는 다음과 같은 수학사적인 실증이 제공된 논문이 존재한다. 관심 있는 분은 일별해보시기를. http://arxiv.org/pdf/1006.4131.pdf

---

참고문헌

Folland. (1984). Real analysis (1st Ed. ed.). John Wiley and Sons.

Rudin. (1976). Principles of mathematical analysis (3rd Ed. ed.). McGraw-Hill.